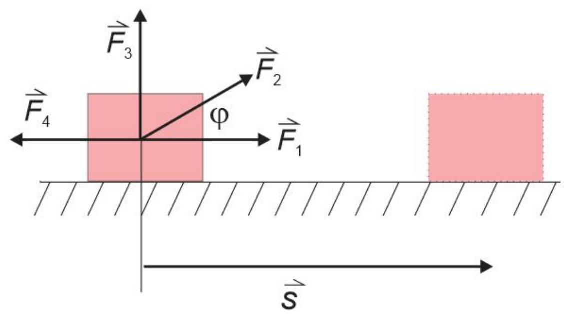
Naloge v drugem letniku gimnazije

Če najdete kakšno računsko ali drugo napako pri rešitvah, prosim, sporočite jo na elektronski naslov

`info@fizika.si`

1. **Na telo delujejo štiri enako velike sile po 10 N. Prva je usmerjena vzdolž premika telesa, druga je usmerjena pod kotom 30 ° glede na premik, tretja je na premik pravokotna in četrta je usmerjena nasprotno od premika. Izračunajte, koliko dela opravi vsaka od teh sil na poti 10 cm. Izračunajte delo rezultante vseh štirih sil.**



Slika 1 Sile, ki delujejo na telo in premik telesa $\vec{s}$.

Delo, ki ga konstantna sila $\vec{F}$ opravi pri premiku telesa $\vec{s}$, izračunamo kakor skalarni produkt:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}|\, |\vec{s}|\, \cos\varphi\,,$$

kjer je $|\vec{F}|$ velikost sile $\vec{F}$ (krajše velikost sile oziroma kateregakoli vektorja označimo kot F, torej brez puščice nad simbolom), $|\vec{s}|$ dolžina premika in φ kot, ki ga oklepata smer sile $\vec{F}$ in premik $\vec{s}$.

Če pojma skalarni produkt ne poznate, si zapomnite le zadnji del zgornje enačbe. Delo sile je produkt velikosti sile, dolžine premika telesa in kosinusa kota med silo in premikom. Ta preprosta zveza velja dokler se sila med premikom ne spreminja. Sicer vzamemo povprečno silo. Tak primero bo pri naslednji nalogi.

Produkt $|\vec{F}|\cos\varphi$ lahko razumemo tako, da delo opravlja le komponenta sile vzdolž smeri premika $\vec{s}$. To bom poskušal razložiti na primeru sile $\vec{F}_2$ na sliki 2.

Če ne poznate kotnih funkcij (kosinusa, ki nastopa v prvi enačbi), si pa zapomnite:
Delo sile je produkt sile in premika telesa. Moramo pa paziti, da, če sila ne deluje natančno v smeri premika, da s premikom množimo le komponento sile, ki kaže v smeri premika. Če kaže ta komponenta v nasprotni smeri premika, je delo sile negativno.

Rešimo primere od lažjih proti težjim.

a) Delo sile $\vec{F}_1$

Delo sile $\vec{F}_1$ ozna"cimo z A_1. Ker smer sile sovpada s smerjo premika $\vec{s}$, je delo te sile kar produkt velikosti sile in premika:

$$A_1 = F_1\, s = 10\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{J}.$$

Produkt enot N in m je J (Joule).

Premislimo še o formuli $A = F\, s\, \cos\varphi$. Sila $\vec{F}_1$ in premik $\vec{s}$ kažeta v isto smer, zato je kot med njima $\varphi = 0$. Poznamo kotne funkcije? Kosinus od nič stopinj je enak 1 in ponovno dobimo $A_1 = F_1\, s = 1\,\mathrm{J}$.

b) Delo sile $\vec{F}_3$

Sila $\vec{F}_3$ je pravokotna na premik telesa. Torej je njena komponenta v smeri premika enaka nič in delo, ki ga opravlja tudi enako nič; $A_3 = 0$.

Lahko bi tudi v formulo $A = F_3\, s\, \cos\varphi$ vstavili $\varphi = 90\,^\circ$ in ugotovili, da je $\cos 90\,^\circ = 0$.

c) Delo sile $\vec{F}_4$

Sila $\vec{F}_4$ deluje v nasprotmo smer od premika telesa. Njena komponenta v smeri premika je kar vseh 10 N. Ker je pa v nasprotni smeri premika, je delo negativno:

$$A_4 = -F_4\, s = -10\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = -1\,\mathrm{J}.$$

Če bi računali s formulo: $A = F_4\, s\, \cos\varphi$ bi vanjo morali vstaviti kot $\varphi = 180\,^\circ$ in ugotovili, da je $\cos 180\,^\circ = -1$.

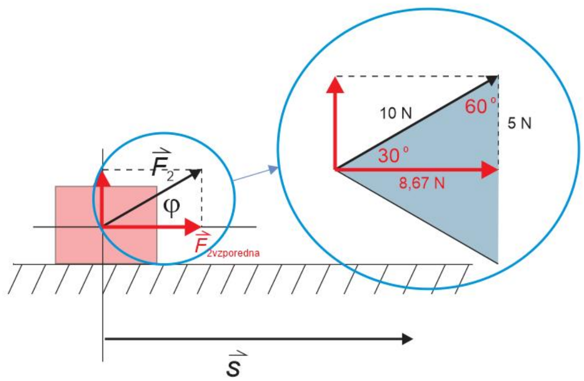
c) Delo sile $\vec{F}_2$

Nazadnje še najbolj kompliciran primer, delo sile $\vec{F}_2$. Ta deluje postrani glede na premik.

Če poznamo formulo s kosinusom kota $A = F\, s\, \cos\varphi$, vanjo vstavimo kot $\varphi = 30\,^\circ$ in dobimo

$$A_2 = F_2\, s\, \cos\varphi = 10\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot \cos 30\,^\circ = 10\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}87\,\mathrm{J}.$$

Če še ne poznamo kotnih funkcij, se moramo lotiti razstavljanja sile $\vec{F}_2$ v komponento, ki kaže v smeri premika, in komponento, ki je pravokotna na premik. Razstavljanje sile $\vec{F}_2$ je narisano na sliki 2.



Slika 2 Silo $\vec{F}_2$, ki je velika 10 N, razstavimo v komponenti narisani z rdečo. Za izračun dela A_2 rabimo dolžino $\vec{F}_{2vzporedna}$. Če poznamo kotne funkcije, vemo da je ta komponenta (priležna) enaka $F_2 \cos 30\,^\circ$. Če kotnih funkcij še ne poznamo, si v tem primeru lahko pomagamo z enakostraničnim trikotnikom. Verjetno je prav zato izbran kot $30\,^\circ$. V krogu (označena povečava) vidimo, da je komponenta, ki jo iščemo, enaka višini enakostraničnega trikotnika s stranico 10 N. Spomnimo se, da je višina enakostraničnega trikotnika enaka $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\,\mathrm{N} = 8{,}67\,\mathrm{N}$.

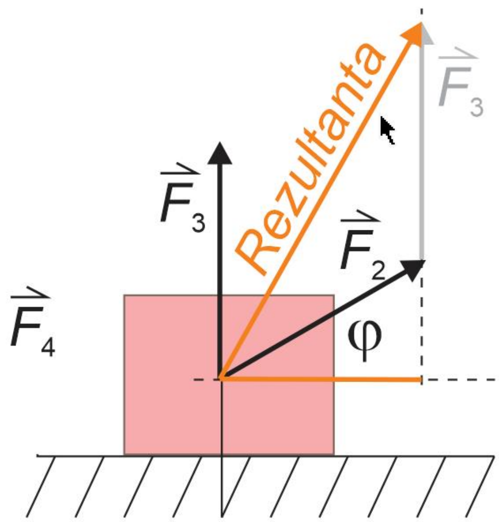
Delo opravlja le komponenta sile, ki kaže v smeri premika $\vec{F}_{2vzporedna}$. Zato je delo enako

$$A_2 = F_{2vzporedna}\, s = 8{,}67\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}87\,\mathrm{J}.$$

Zberimo rezultate v tabeli:

A_1	1 J
A_2	0,87 J
A_3	0 J
A_4	- 1 J
skupaj	0,87 J

Izračunajmo še delo rezultante sil, ki so narisane na sliki 1. Najprej izračunamo rezultanto. Sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_4}$ sta nasprotno enaki in je njuna vsota enaka nič. Naprej si pomagamo s sliko 3. Sili $\vec{F_1}$ in $\vec{F_4}$, ki sta se sešteli v nič, na sliki 3 ne rišemo. Vsota $\vec{F_2} + \vec{F_3}$ pa ima očitno vporedno komponento enako vzporedni komponenti sile $\vec{F_2}$, to je 8,67 N. Navpična komponenta rezultante (ki nas sicer pri računanju dela ne zanima, saj je v tem primeru pravokotna na premik) znaša 5 N (navpični prispevek sile $\vec{F_2}$) plus 10 N (celotna sila $\vec{F_3}$).



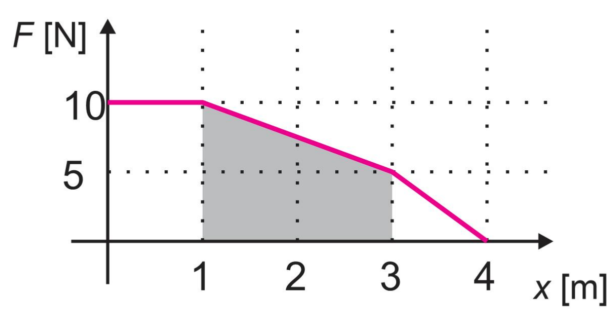
Slika 3 Seštevanje sil $\vec{F_2}$ in $\vec{F_3}$. Sile seštevamo tako, da v konec (puščico) prve damo začetek druge (sivo na sliki). Oranžna je rezultanta. Vodoravna komponenta rezultante (oranžna vodoravna daljica) je v tem primeru enako dolga kakor vodoravna komponenta sile $\vec{F_2}$.

Povzemimo: Rezultanta ima vodoravno komponento, ki je vzporedna premiku telesa, enako 8,67 N in navpično komponento 15 N. Delo rezultante

$$A = F_{vporedna}\, s = 8{,}67\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}87\,\mathrm{J}.$$

Rezultat je pričakovano enak skupnemu delu vseh sil, ki smo ga izračunali na dni tabele.

2. **Sila, ki deluje na telo z maso 5,0 kg, se med vodoravno potjo spreminja, kot kaže graf. Izračunajte delo te sile na poti 4,0 m. Izračunajte hitrost telesa, če je telo na začetku mirovalo.**



Slika 4 Sila, ki se spreminja s potjo.

V navodilih ne piše, da sila, ki je prikazana na grafu, deluje v vodoravni smeri. Da je torej smer sile enaka smeri premika. Pri prvi nalogi smo se naučili, da je to pomembno, sicer moramo za računanje dela upoštevati le komponento sile, ki je vzporedna premiku.

Predpostavimo torej, da je sila vodoravna prav tako kakor premik.

Če bi bila sila konstantna, bi delo izračunali kot produkt sile in premika.

Za prvi meter je to res. Označimo z A_{0-1} delo, ki ga sila F opravi prvi meter poti:

$$A_{0-1} = 10\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{J}.$$

Od prve sekunde naprej se sila s potjo spreminja. Dela lahko izračunamo z upoštevanjem povprečne sile. Na odsekih, kjer se sila s potjo spreminja linearno, je povprečna sila kar srednja vrednost sile.

Zato odsek od prve do četrte sekunde razdelimo v dva dela.

Med prvim in tretjim metrom (premik je torej 2 m) se sila linearno zmanjša od 10 N na 5 N in je njena povprečna vrednost 7,5 N. Delo na tem odseku je

$$A_{1-3} = 7{,}5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{J}.$$

Mogoče ste v šoli povedali, da je delo, ki ga opravi sila, tudi enako površini pod grafom $F(x)$, ki ga vidimo na sliki 4. Na odseku 1 s do 3 s bi morali izračunati površino trapeza (osenčeno na sliki) in dobili bi enak rezultat, torej 15 J, kakor smo ga z upoštevanjem povprečne sile.

Delo sile F na poti med 3 m in 4 m je enako

$$A_{3-4} = 2{,}5\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 2{,}5\,\mathrm{J},$$

kjer je 2,5 N povprečna sila med 3 in 4 metrom.

Celotno delo sile F na poti 4 m je potem:

$$A = A_{0-1} + A_{1-3} + A_{3-4} = 10\,\mathrm{J} + 15\,\mathrm{J} + 2{,}5\,\mathrm{J} = 27{,}5\,\mathrm{J}.$$

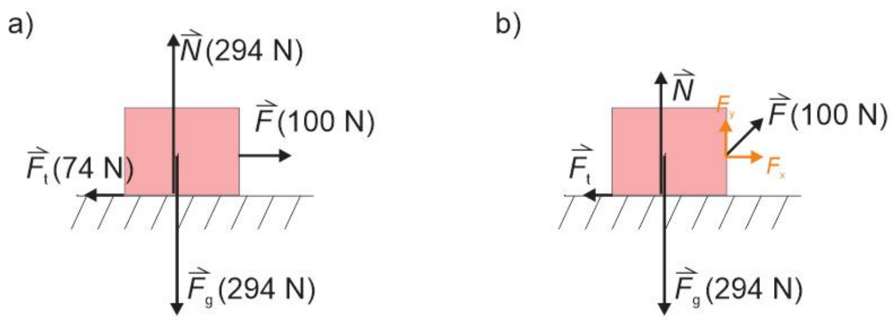
Avtor naloge potem sprašuje še kolikšno hitrost pridobi telo zaradi dela, ki ga opravi sila F, če je na začetku telo mirovalo. Ob predpostavki, da je sila F edina sila, ki opravlja delo na telesu, se delo te sile pretvori v povečanje kinetične energije telesa:

$$A = \Delta W_k = \frac{m\,v^2}{2}.$$

Sledi

$$v = \sqrt{\frac{2\,A}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 27{,}5\,\mathrm{J}}{5\,\mathrm{kg}}} = 3{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

3. **Po vodoravnih tleh vlečemo zaboj z maso 30 kg. Koeficienr trenja med zabojem in tlemi je 0,25. Velikost vlečne sile je 100 N. Zaboj premaknemo za 5,0 m. Izračunajte delo vlečne sile in delo rezultante vseh sil na zaboj, če je:**
a) vlečna sila vzporedna s tlemi
b) vlečna sila usmerjena navzgor pod kotom 45° glede na tla.



Slika 5 Sile na zaboj. Velikosti sil na sliki a) so zaokrožene kakor, da bi za težni pospešek upoštevali vrednost $10\,\mathrm{m/s^2}$.

Primer a)

Poznamo vlečno silo $\vec{F}$, katere velikost je 100 N. Deluje v vodoravni smeri, desno na sliki 5. Sila je torej vzporedna premiku zaboja, zato je delo te sile enako $A = 100\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{J}$.

Naslednja sila, ki jo poznamo, je teža $\vec{F}_g$. Deluje navpično navzdol, velika pa je $|\vec{F}_g| = F_g = m\,g = 30\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 294\,\mathrm{N}$.

Pravokotno silo podlage označimo z $\vec{N}$ (včasih tudi $\vec{F}_p$, ni pomembno kako jo označimo). Zaboj se v navpični smeri ne premika, zato mora biti (pomislimo na 1. Newtonov zakon) vsota sil v navpični smeri enaka nič. V navpični smeri delujeta le teža in pravokotna sila podlage. Zato je pravokotna sila podlage v tem primeru po velikosti kar enaka teži, torej $N = 294\,\mathrm{N}$. Zavedajmo se (tako bo že v primeru b)), da ni pravilo, da mora biti sila podlage $\vec{N}$ kar nasprotno enaka teži! V nekaterih primerih je tako, velikokrat ni.

Nazadnje izračunamo še silo trenja $\vec{F}_t$. Ta opisuje s kakšno silo podlaga v smeri vzporedno s površino podlage zavira drsenje telesa po podlagi. Po velikosti je enaka $F_t = k_t\,N = 0{,}25 \cdot 294\,\mathrm{N} = 73{,}5\,\mathrm{N}$, kjer je k_t koeficient trenja. Enačbe $F_t = k_t\,N$ ne smemo pisati z vektorskimi znaki nad silama $\vec{F}_t$ in $\vec{N}$ saj sili $\vec{F}_t$ in $\vec{N}$ ne kažeta v isto smer. Enačba $F_t = k_t\,N$ nam pove kako velika je sila trenja $\vec{F}_t$, smer je pa vzporedna s podlago.

Izračunali smo torej vse sile. Izračunajmo še rezultanto. Za to moramo posebaj sešteti vse sile oziroma njihove komponente v vodoravni in navpični smeri.

V vodoravni smeri imamo v primeru a) dve sili: vlečno in trenje. Delujeta v nasprotni smeri, torej ima rezultanta v vodarvni smeri velikost $100\,\mathrm{N} - 73{,}5\,\mathrm{N} = 26{,}5\,\mathrm{N}$ v smeri premikanja zaboja (desno na sliki 4 a)).

V navpični smeri se zaboj ne premika in - to smo že upoštevali pri računanju sile podlage N - je rezultanta sil enaka nič.

Zaključek: rezultanta sil deluje v vodoravni smeri (to je tudi smer premika zaboja) in je velika $26{,}5\,\mathrm{N}$.

Delo rezultante sil znaša $A_{rezultante} = F_{rezultanta}\,s = 26{,}5\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 133\,\mathrm{J}$.

Primer b)

Vlečna sila zdaj deluje pod kotom 45° glede na vodoravnico. Razstavimo jo v vodoravno in navpično komponento. Kot 45° je izbran zato, da razstavljanje lahko naredimo s premislekom o kvadratu. Vemo, da je diagonala v kvadratu enaka $\sqrt{2}$ krat stranica. Potem je stranica, to je v našem primeru enako vodoravni in navpični komponenti vlečne sile, enaka: $F_x = F_y = F/\sqrt{2} = 70{,}7\,\mathrm{N}$.

Prehitro in narobe bi lahko sklepali: vodoravna komponenta vlečene sile je zdaj manjša (pravilno), odštejmo že prej izračunano (narobe!) silo trenja in pridemo do nekoliko drugačnega rezultata. Sile trenja namreč zdaj ni enaka izračunani v primeru a).

Premislimo. Sila trenja je enaka produktu k_t (ta se ne spremeni) in pravokotne sile podlage N. Slednja se spremeni - v primeru b) ni enaka kakor v primeru a). Podlaga v primeru b) manj pomaga držati zaboj na tleh, saj ga nekoliko privzdigujemo z navpično komponento vlečne sile. Ravnovesje sil v navpični smeri v primeru b) zapišemo (poglejmo še enkrat sile in komponente na sliki 5 b)

$$F_g = N + F_y$$

in izračunamo $N = F_g - F_y = 294\,\mathrm{N} - 70{,}7\,\mathrm{N} = 223{,}3\,\mathrm{N}$.

Sila trenja je potem $F_t = k_t\,N = 0{,}25 \cdot 223{,}3\,\mathrm{N} = 55{,}8\,\mathrm{N}$.

Rezultanta sil v vodoravni smeri je

$$F_{rezultanta} = F_x - F_t = 70{,}7\,\mathrm{N} - 55{,}8\,\mathrm{N} = 14{,}9\,\mathrm{N}.$$

Ne pozabimo v odgovoru dodati, da je rezultanta sil v navpični smeri enaka nič. Ob upoštevanju tega smo namreč izračunali N.

Delo, ki ga opravi rezultanta sil (njena vodoravna komponenta, ki je vzporedna premiku) je

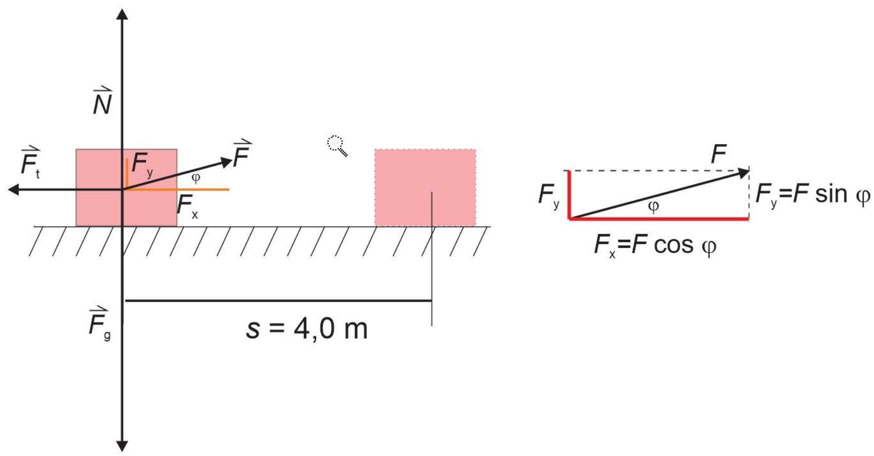
$$A_{rezultante} = F_{rezultanta}\,s = 14{,}9\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 74\,\mathrm{J}.$$

Ne pozabimo odgovoriti še na prvo vprašanje v primeru b). Delo vlečene sile je

$$A = F_x\,s = 70{,}7\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} = 354\,\mathrm{J}.$$

Pri računanju dela moramo vedno upoštevati le komponento sile, ki je vzporedna premiku. Zato smo v zadnji formuli zapisali F_x namesto celotne sile F.

4. **Klado z maso 3,6 kg povlečemo s konstantno hitrostjo 4,0 m daleč po vodoravnih tleh s konstantno silo 7,7 N pod kotom $15\,^\circ$ z vodoravnico. Izračunajte delo, ki ga na kladi opravi vlečna sila in koeficient trenja med klado in tlemi.**



Slika 6 Sile na klado. Desno je narisano kako s sinusom in kosinusom izračunamo kateti v pravokotnem trikotniku. Ta postopek velikokrat potrebujemo pri računanju kompenent neke sile. Zapomnimo si, da je priležna komponenta enaka hipotenuzi krat kosinus kota, nasprotna kateta pa je enaka hipotenuzi pomnoženi s sinusom kota.

Glede na to, da se klada giblje enakomerno, mora biti vsota sil na klado enaka nič.

Računsko to pomeni, da moramo sile oziroma njihove komponente, preračunati tako, da je vsota sil v vodoravni smeri enaka nič in vsota sil v navpični smeri enaka nič.

Vlečno silo, ki deluje pod kotom $\varphi = 15\,^\circ$ glede na vodoravnico, moramo razstaviti v vodoravno in navpično komponento. Poglejmo na sliko 6 in ugotovimo:

$$F_x = F\,\cos\varphi = 7{,}7\,\mathrm{N}\cdot\cos 15\,^\circ = 7{,}44\,\mathrm{N},$$

$$F_y = F\,\sin\varphi = 7{,}7\,\mathrm{N}\cdot\sin 15\,^\circ = 1{,}99\,\mathrm{N}.$$

Delo opravlja le komponenta sile, ki je vzporedna premiku. Klada se premika vodoravno (le komponenta F_x je v smeri premika), zato je delo vlečne sile:

$$A = F_x\,s = 7{,}44\,\mathrm{N}\cdot 4\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{J}.$$

Poleg vodoravne komponente vlečne sile, je sila trenja F_t edina, ki deluje v vodoravni smeri. Ker mora v tej smeri biti vsota sil enaka nič (klada se namreč giblje enakomerno), sledi, da mora biti sila trenja nasprotno enaka vodoravni komponenti vlečne sile:

$$F_t = F_x = 7{,}44\,\mathrm{N}.$$

Namerno nismo pisali $F_t = -F_x$, kajti šlo je le za velikost sil. Smer smo opisali v stavku.

Koeficient trenja bomo izračunali iz zveze $F_t = k_t\,N$. Poznamo F_t, izračunati moramo še N.

Spet imamo primer, ko bi bilo narobe, če bi kar zapisalli, da je pravokotna sila podlage nasprotno enaka teži. Tudi vlečna sila ima navpično komponento F_y in v ravnovesju velja:

$$N + F_y = F_g.$$

Potem je

$$N = F_g - F_y = m\,g - F_y = 3{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s} - 1{,}99\,\mathrm{N} = 33{,}3\,\mathrm{N}$$

in

$$k_t = \frac{F_t}{N} = \frac{7{,}44\,\mathrm{N}}{33{,}3\,\mathrm{N}} = 0{,}22.$$